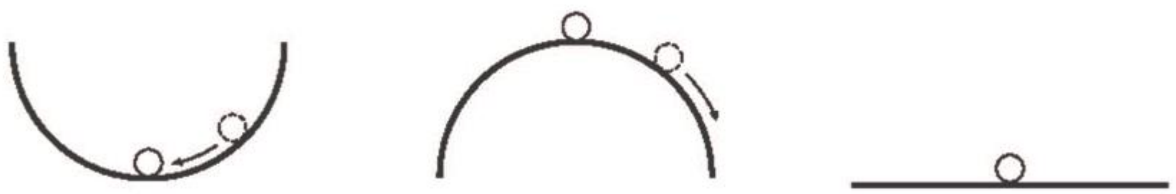
Stabilität

Aus der Vorlesung:

Definition 3.1 (*Stabilität*)

i) Eine **Ruhelage** eines dynamischen Systems heißt (*asymptotisch*) **stabil**, wenn das System nach Auslenkung aus der Ruhelage selbsttätig in die Ruhelage zurückkehrt (Bild 3.2).



a) b) c)

Bild 3.2: Stabilität von Ruhelagen
a) stabile Ruhelage b) instabile Ruhelage c) indifferente Ruhelage

Stabilität

- Bezogen auf lineare Übertragungssysteme folgt daraus:

- Ein lineares Übertragungssystem ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für die Wurzeln seiner charakteristischen Gleichung gilt:

$$Re\,\{p_i\} < 0, \qquad i = 1, \dots, n$$

- Wurzel der char. Gleichung entsprechen den Polstellen der ÜF
- Realteile <u>aller</u> Polstellen müssen negativ sein

- Berechnung der Polstellen für $n > 2$ aufwendig und für $n \geq 4$ i.A. nur noch numerisch möglich
  $\rightarrow$ Algebraische Stabilitätskriterien um Stabilitätsbed. zu prüfen

Algebraische Stabilitätskriterien

- Ermöglichen Aussage über Lage der Polstellen, ohne diese zu berechnen
- Ein Polynom

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

dessen Polstellen alle einen negativen Realteil haben, werden Hurwitz-Polynome genannt

- Ein System ist also asymptotisch stabil, wenn sein charakteristisches Polynom ein Hurwitz-Polynom ist

Hurwitz-Kriterium

- Ein Polynom ist Hurtwitz-Polynom wenn:

- <u>notwendige Bedingung:</u> alle a_i , $i = 0, \ldots, n$ sind vorhanden und haben das gleiche Vorzeichen

- <u>hinreichende Bedingung:</u> Hurwitzdet. H_{n-1} sowie alle ihre Hauptdet. $H_i, i = 1, \ldots, n-2$ sind positiv

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} H_1 & H_2 & H_3 \end{array} \\ H_{n-1} = & \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & a_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_2 & a_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_5 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} \end{array} \quad (3.30)$$

Routh-Kriterium

- Hurtwitz-Kriterium nur Ja/Nein-Entscheidung, Routh ermöglicht Aussage über Anzahl instabiler Polstellen/Eigenwerte

- <u>notwendige Bedingung:</u> alle $a_i\ , i = 0, \ldots, n$ sind vorhanden und haben das gleiche Vorzeichen (identisch zu Hurwitz)

- <u>hinreichende Bedingung:</u> Alle Elemente der ersten Spalte des Routh-Schemata (s. nächste Folie) sind positiv

- <u>Zusätzlich:</u> Anzahl der Vorzeichenwechsel in erster Spalte entspricht Anzahl der Wurzeln mit positivem Realteil und damit der Anzahl an instabilen Polstellen/Eigenwerten

Routh-Kriterium

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$
$A_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$B_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$C_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$	$\cdots$
$A_2 = \frac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1}B_1}{A_1}$	$B_2 = \frac{A_1 a_{n-5} - a_{n-1}C_1}{A_1}$	$C_2 = \frac{A_1 a_{n-7} - a_{n-1}D_1}{A_1}$	$\cdots$
$A_3 = \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_2}$	$B_3 = \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_2}$	$\cdots$	$\cdots$
$A_4 = \frac{A_3 B_2 - A_2 B_3}{A_3}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$